Styczne krzywych

Styczne do okręgu, to już sprawa prosta. Tym razem spróbujcie wyznaczyć styczne do krzywych:

a) paraboli o równaniu: $y = ax^2, dla\ a \neq 0.$

b) hiperboli o równaniu: $y = \frac{a}{x}, dla\ a \neq 0.$

Rozwiązanie:

a) Należy rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

Wyznaczone z drugiego równania y ma postać

$$y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B}$$

Podstawiamy do równania pierwszego i mamy

$$-\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B} = ax^2$$

Zatem

$$ax^2 + \frac{A}{B}x + \frac{C}{B} = 0$$

Ponieważ prosta ma być styczna do paraboli to powyższe równanie musi mieć jedno rozwiązanie, czyli Δ=0.

$$\Delta = \frac{A^2}{B^2} - 4 \cdot a \cdot \frac{C}{B} = 0$$

$$\frac{A^2}{B^2} = 4 \cdot a \cdot \frac{C}{B}$$

Niech punkt styczności $P = (x_0;\ y_0)$. Wówczas

$$x_0 = -\frac{A}{2aB}$$

$$y_0 = -\frac{Ax_0}{B} - \frac{C}{B} = -\frac{A \cdot \frac{-A}{2aB}}{B} - \frac{C}{B} = \frac{A^2}{2aB^2} - \frac{C}{B} = 4 \cdot a \cdot \frac{C}{B} \cdot \frac{1}{2a} - \frac{C}{B} = 2 \cdot \frac{C}{B} - \frac{C}{B} = \frac{C}{B}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy A

$$A = -2ax_0B$$

Z drugiego równania wyznaczamy C

$$C = By_0$$

Równanie prostej stycznej do paraboli ma więc postać

$$-2ax_0Bx + By + By_0 = 0$$

$$-2ax_0x + y + y_0 = 0$$

b) Należy rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{x} \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

Oczywiście musimy założyć, że $x \neq 0$

Wyznaczone z drugiego równania y ma postać

$$y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B}$$

Podstawiamy do równania pierwszego i mamy

$$-\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B} = \frac{a}{x}$$

$$-Ax^2 - Cx = aB$$

Zatem

$$Ax^2 + Cx + aB = 0$$

Ponieważ prosta ma być styczna do paraboli to powyższe równanie musi mieć jedno rozwiązanie, czyli Δ=0.

$$\Delta = C^2 - 4aAB = 0$$

Niech punkt styczności $P = (x_0;\ y_0)$. Wówczas

$$x_0 = -\frac{C}{2A}$$

$$y_0 = -\frac{Ax_0}{B} - \frac{C}{B} = -\frac{A \cdot \frac{-C}{2A}}{B} - \frac{C}{B} = \frac{C}{2B} - \frac{C}{B} = \frac{C - 2C}{2B} = \frac{-C}{2B}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy A

$$A = -\frac{C}{2x_0}$$

Z drugiego równania wyznaczamy B

$$B = -\frac{C}{2y_0}$$

Równanie prostej stycznej do paraboli ma więc postać

$$-\frac{C}{2x_0}x - \frac{C}{2y_0} + C = 0$$

$$-\frac{1}{2x_0}x - \frac{1}{2y_0}y + 2 = 0$$

$$-y_0x - x_0y + 2x_0y_0 = 0$$

Ponieważ jednak

$$x_0y_0 = a$$

Więc ostatecznie

$$y_0x + x_0y - 2a = 0$$

Opracował Jacek Kredenc