Wskazówki do zadań testowych.

Matura 2016

Zadanie 1

Dla każdej dodatniej liczby *a* iloraz $\frac{a^{-2,6}}{a^{1,3}}$ jest równy

A. $a^{-3,9}$ **B.** a^{-2} **C.** $a^{-1,3}$ **D.** $a^{1,3}$

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru

$$\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$$

$$\frac{a^{-2,6}}{a^{1,3}} = a^{-2,6-1,3} = a^{-3,6}$$

Odpowiedź

A

Zadanie 2

Liczba $\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})$ jest równa

A. $\frac{3}{2}$ **B. 2** **C.** $\frac{5}{2}$ **D. 3**

Rozwiązanie

$$\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}) = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{8} = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{2^3} = \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^3 = 3$$

Odpowiedź

D

Zadanie 3

Liczby *a* i *c* są dodatnie. Liczba *b* stanowi 48% liczby *a* oraz 32% liczby *c*. Wynika stąd, że

A. *c* =1,5*a* **B.** *c* =1,6*a* **C.** *c* = 0,8*a* **D.** *c* = 0,16*a*

Rozwiązanie

$$b = 0,48a \quad i \quad b = 0,32c$$

$$0,48a = 0,32c$$

$$c = \frac{0,48a}{0,32} = \frac{3}{2}a = 1,5a$$

Odpowiedź

A

Zadanie 4

Równość $\left(2\sqrt{2}-a\right)^2 = 17-12\sqrt{2}$ jest prawdziwa dla

A. $a = 3$ **B.** $a = 1$ **C.** $\boldsymbol{a=-2}$ **D.** $\boldsymbol{a=-3}$

Rozwiązanie

$\left(2\sqrt{2}-a\right)^2 = 8-4\sqrt{2}a+a^2 = 17-12\sqrt{2}$

Gdy $a=3$, to $4\sqrt{2}a = 4\sqrt{2}\cdot 3 = 12\sqrt{2}$ i $8+a^2 = 8+3^2 = 8+9 = 17$

Odpowiedź

A

Zadanie 5

Jedną z liczb, które spełniają nierówność $-x^5+x^3-x<-2$, jest

A. 1 **B.** $\boldsymbol{-1}$ **C.** 2 **D.** $\boldsymbol{-2}$

Rozwiązanie

Metodą prób i błędów

$-1+1-1=-1>-2$

$-(-1)^5+(-1)^3-(-1) = 1-1+1 = 1 > -2$

$-2^5+2^3-2 = -36+8-2 = -30 < -2$

Ponieważ testy są tak konstruowane, że tylko jedna odpowiedź jest prawdziwa szkoda czasu na sprawdzanie odpowiedzi D.

Odpowiedź

C

Zadanie 6

Proste o równaniach $2x-3y=4$ i $5x-6y=7$ przecinają się w punkcie P . Stąd wynika, że

A. $P=(1,2)$ **B.** $\boldsymbol{P=(-1,2)}$ **C.** $\boldsymbol{P=(-1,-2)}$ **D.** $\boldsymbol{P=(1,-2)}$

Rozwiązanie

Rozwiążmy układ równań

$$\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 5x-6y=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x+6y=-8 \\ 5x-6y=7 \end{cases}$$

$$\overline{}$$

$$x=-1$$

Wstawmy w pierwszym równaniu w miejsce x -1

$2x-3y=4$

$2\cdot(-1)-3y=4$

$-3y=6$

$y=-2$

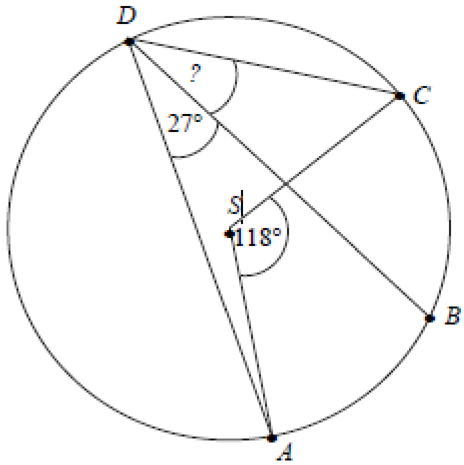
Odpowiedź

C

Zadanie 7

Punkty *ABCD* leżą na okręgu o środku *S* (zobacz rysunek).
Miara kąta *BDC* jest równa

A. 91°
B. 72,5°
C. 18°
D. 32°



Rozwiązanie

Kąt ADC jest wpisany i oparty na tym samym łuku co kąt środkowy ASC, oznacza to, że $|\angle ADC| = 59^0$. Kąt ADC jest sumą kątów ADB i BDC, oznaczony na rysunku znakiem „?”
Z tego wniosek, że szukany kąt ma 32^0.

Odpowiedź

D

Zadanie 8

Dana jest funkcja liniowa $f(x) = \frac{3}{4}x + 6$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba

A. 8 **B.** 6 **C.** -6 **D.** -8

Rozwiązanie

Metoda prób i błędów

$\frac{3}{4}x + 6 = \frac{3}{4} \cdot 8 + 6 = 6 + 6 = 12$

$\frac{3}{4}x + 6 = \frac{3}{4} \cdot 6 + 6 = \frac{9}{2} + 6 = 10\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}x + 6 = \frac{3}{4} \cdot (-6) + 6 = \frac{-9}{2} + 6 = 1\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}x + 6 = \frac{3}{4} \cdot (-8) + 6 = -6 + 6 = 0$

Odpowiedź

D

Zadanie 9

Równanie wymierne $\frac{3x-1}{x+5} = 3 \quad gdzie \quad x \neq -5$

A. nie ma rozwiązań rzeczywistych.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.
D. ma dokładnie trzy rozwiązania rzeczywiste.

Rozwiązanie

$$\frac{3x-1}{x+5} = 3$$

$3x - 1 = 3x + 15$

$-1 = 15$

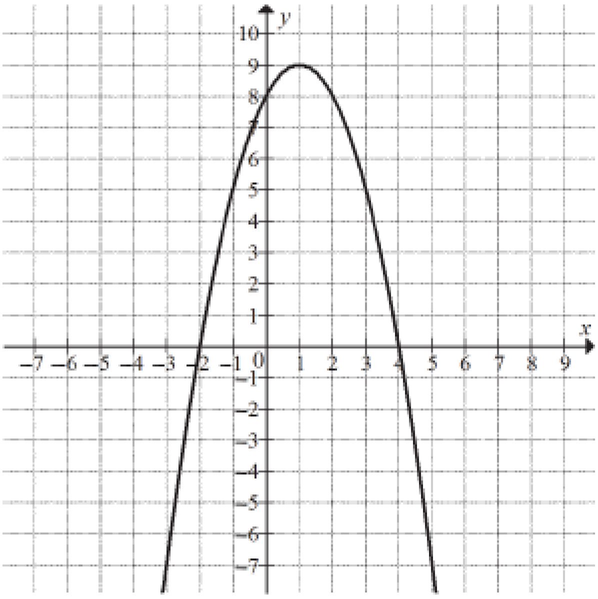
Co nie jest prawdą

Odpowiedź

A

Informacja do zadań 10. i 11.

Na rysunku przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej *f*. Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (1, 9)$. Liczby -2 i 4 to miejsca zerowe funkcji *f*.



Zadanie 10

Zbiorem wartości funkcji *f* jest przedział

A. $(-\infty, \ -2\rangle$ **B.** $\langle -2, 4\rangle$ **C.** $\langle 4, \ +\infty)$ **D.** $(-\infty, \ 9\rangle$

Rozwiązanie

Wartości szukamy na osi pionowej

Odpowiedź

D

Zadanie 11

Najmniejsza wartość funkcji *f* w przedziale $\langle -1, 2\rangle$ jest równa

A. 2 **B.** 5 **C.** 8 **D.** 9

Rozwiązanie

Najmniejszą wartością na tym przedziale jest liczba 5

Odpowiedź

B

Zadanie 12

Funkcja *f* określona jest wzorem $f(x) = \frac{2x^3}{x^6+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej *x*. Wtedy

$f(-\sqrt[3]{3})$ jest równa

A. $-\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$ **B.** $-\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Rozwiązanie

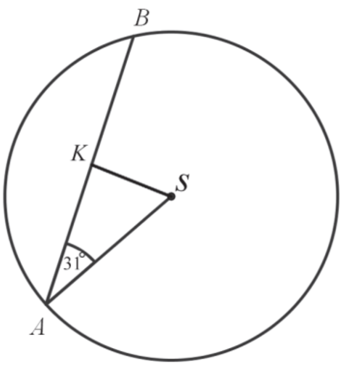
$$\frac{2x^3}{x^6+1}=\frac{2\left(-\sqrt[3]{3}\right)^3}{\left(-\sqrt[3]{3}\right)^6+1}=\frac{2\cdot(-3)}{3^2+1}=\frac{-6}{10}=-\frac{3}{5}$$

Odpowiedź

B

Zadanie 13

W okręgu o środku w punkcie S poprowadzono cięciwę AB, która utworzyła z promieniem AS kąt o mierze 31° (zobacz rysunek). Promień tego okręgu ma długość 10. Odległość punktu S od cięciwy AB jest liczbą z przedziału



A. $\langle \frac{9}{2}, \frac{11}{2} \rangle$

B. $\left(\frac{11}{2}, \frac{13}{2} \right\rangle$

C. $\left(\frac{13}{2}, \frac{19}{2} \right\rangle$

D. $\left(\frac{19}{2}, \frac{37}{2} \right\rangle$

Rozwiązanie

Przy założeniu, że kąt ma 30^0 robimy niewielki błąd. Sinus 30^0wynosi 0,5 odległość wynosi około 5

Odpowiedź

A

Zadanie 14

Czternasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 8, a różnica tego ciągu jest równa $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Siódmy wyraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{37}{2}$ **B.** $-\frac{37}{2}$ **C.** $-\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Rozwiązanie

$$a_{14}=a_1+13\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=a_1-\frac{39}{2}=8$$

$$a_1=27\frac{1}{2}$$

$$a_7=27\frac{1}{2}+6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=27\frac{1}{2}-9=18\frac{1}{2}$$

Odpowiedź

A

Zadanie 15

Ciąg $(x,\ 2x+3,\ 4x+3)$ jest geometryczny. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. -4 **B.** 1 **C.** 0 **D.** -1

Rozwiązanie

Metoda prób i błędów

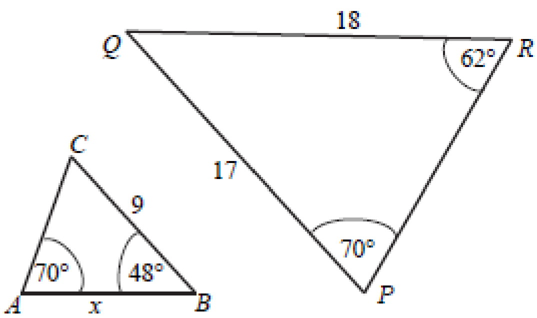
$(-4,-5,-13)$

Ten ciąg nie jest geometryczny

$(1,5,7)$
To też nie jest ciąg geometryczny
$(0,3,3)$
Ten ciąg nie jest geometryczny
$(-1,1,-1)$
Jest to ciąg geometryczny o ilorazie (-1)
Odpowiedź
D

Zadanie 16

Przedstawione na rysunku trójkąty *ABC* i *PQR* są podobne. Bok *AB* trójkąta *ABC* ma długość



A. 8
B. 8,5
C. 9,5
D. 10

Rozwiązanie

Stosunek odpowiadających sobie boków w trójkątach podobnych jest stały. Bokowi AB w trójkącie ABC odpowiada bok QP w trójkącie QPR. Bokowi BC w trójkącie ABC odpowiada bok QR w trójkącie QPR. Zachodzi więc równość

$$\frac{x}{17} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$$x = 8\frac{1}{2}$$

Odpowiedź
B

Zadanie 17

Kąt α jest ostry i $\tan \propto = \frac{2}{3}$. Wtedy

A. $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{26}$ **B.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$ **C.** $\sin \propto = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ **D.** $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

Rozwiązanie

Jeżeli $\tan\alpha = \frac{2}{3}$, to znaczy, że w pewnym trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają odpowiednio długości: 2 i 3. Przeciwprostokątna w tym trójkącie ma długość

$$\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Odpowiedź
C

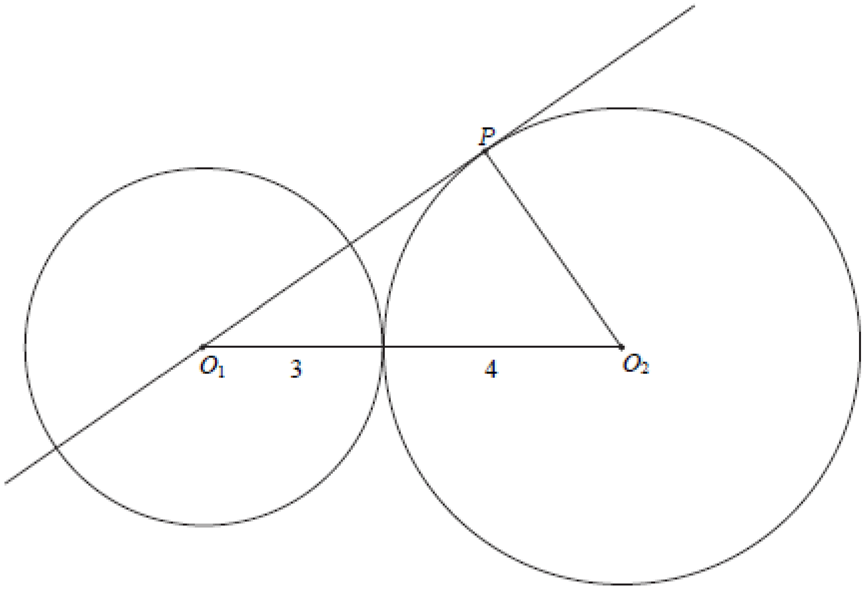
Zadanie 18

Z odcinków o długościach: 5 , 2*a* +1, $a-1$ można zbudować trójkąt równoramienny. Wynika stąd, że

A. $a = 6$ **B.** $a = 4$ **C.** $a = 3$ **D.** $a = 2$

Rozwiązanie
Metoda prób i błędów
5, 13, 5
Z tych odcinków trójkąt niepowstanie
5, 9, 3
Z tych odcinków też trójkąt nie powstanie
5, 7, 2
Z tych odcinków trójkąt nie powstanie
5, 5, 1
Powstanie trójkąt równoramienny
Odpowiedź
D.

Zadanie 19
Okręgi o promieniach 3 i 4 są styczne zewnętrznie. Prosta styczna do okręgu o promieniu 4 w punkcie *P* przechodzi przez środek okręgu o promieniu 3 (zobacz rysunek). Pole trójkąta, którego wierzchołkami są środki okręgów i punkt styczności *P*, jest równe
A. 14 **B.** $2\sqrt{33}$ **C.** $4\sqrt{33}$ **D.** 12



Rozwiązanie
Trójkąt O_1O_2P jest prostokątny, bo promień okręgu poprowadzony ze środka tego okręgu do punktu styczności jest prostopadły do stycznej.
Policzmy $|O_1P|$
$|O_1O_2| = 7$
$|O_2P| = 4$
$|O_1P| = \sqrt{|O_1O_2|^2 - |O_2P|^2} = \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{49 - 16} = \sqrt{33}$
$P = \frac{1}{2} \cdot |O_1P| \cdot |O_2P| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{33} \cdot 4 = 2\sqrt{33}$
Odpowiedź
B

Zadanie 20

Proste opisane równaniami $y = \frac{2}{m-1}x + m - 2$ oraz $y = mx + \frac{1}{m+1}$ są prostopadłe, gdy

A. $m = 2$ **B.** $m = \frac{1}{2}$ **C.** $m = \frac{1}{3}$ **D.** $m = -2$

Rozwiązanie

Dwie proste są prostopadłe, gdy ich współczynniki są do siebie przeciwne i odwrotne, czyli zachodzi równość

$$-\frac{m-1}{2} = m$$

$$-(m-1) = 2m$$

$$-m + 1 = 2m$$

$$3m = 1$$

$$m = \frac{1}{3}$$

Odpowiedź

C

Zadanie 21

W układzie współrzędnych dane są punkty $A = (a, 6)$ oraz $B = (7, b)$. Środkiem odcinka AB jest punkt $M = (3, 4)$. Wynika stąd, że

A. $a = 5$ i $b = 5$ **B.** $a = -1$ i $b = 2$ **C.** $a = 4$ i $b = 10$ **D.** $a = -4$ i $b = -2$

Rozwiązanie

Współrzędne środka odcinka są średnią arytmetyczną współrzędnych jego końców

$$\frac{a+7}{2} = 3$$

$$a + 7 = 6$$

$$a = -1$$

Aby zaoszczędzić czas, w tym miejscu można rachunki przerwać, gdyż tylko w odpowiedzi B $a = -1$

Odpowiedź

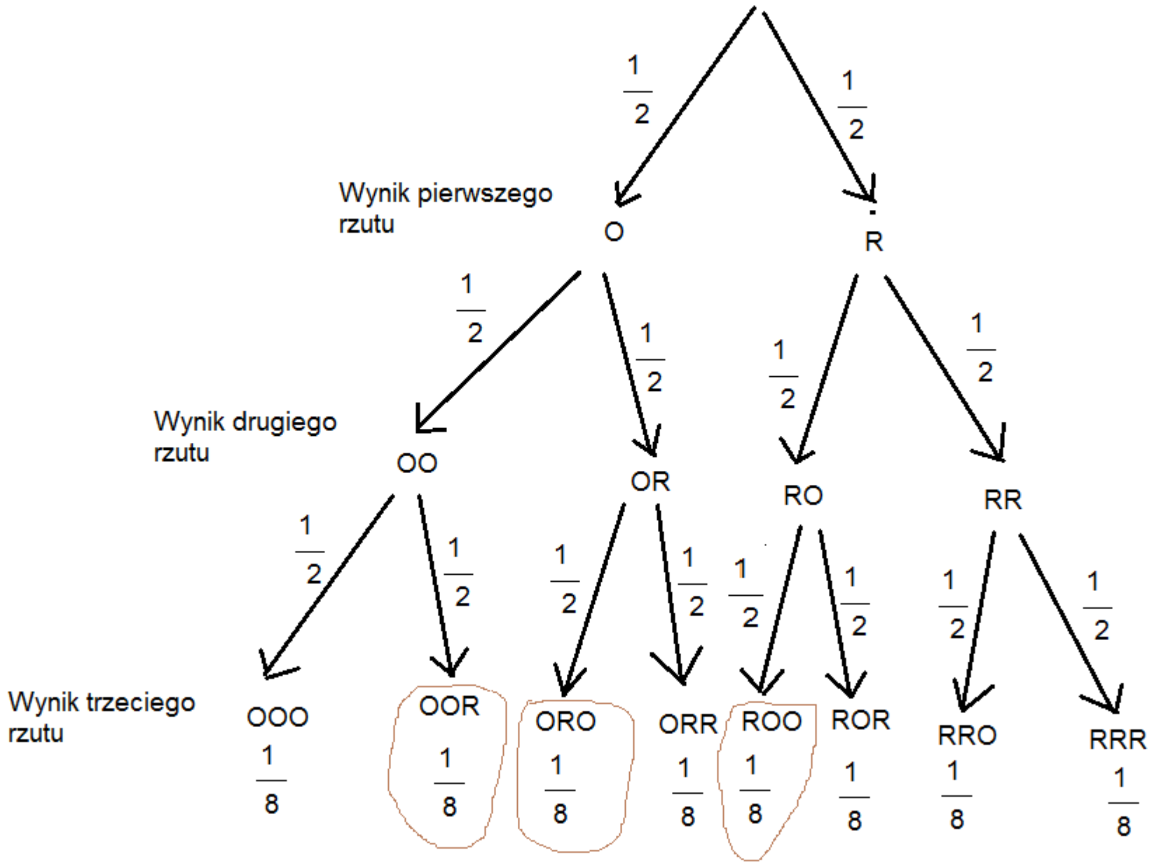
B

Zadanie 22

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch orłów w tych trzech rzutach. Wtedy

A. $0 \le p < 0{,}2$ **B.** $0{,}2 \le p \le 0{,}35$ **C.** $0{,}35 < p \le 0{,}5$ **D.** $0{,}5 < p \le 1$

Rozwiązanie



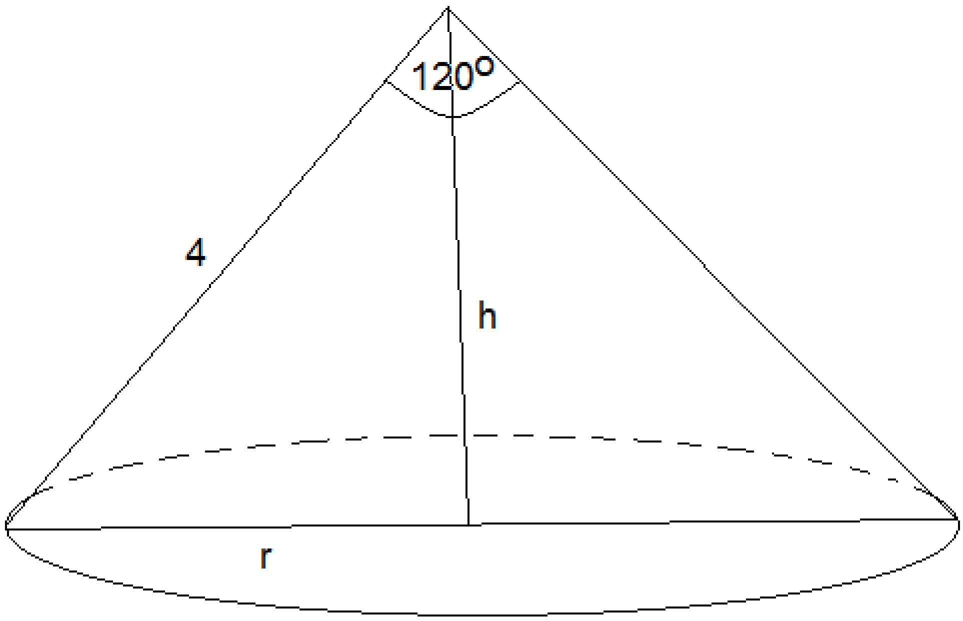
Popatrz na rysunek. Interesujące nas prawdopodobieństwo wynosi $\frac{3}{8} = 0{,}375$

Odpowiedź
C

Zadanie 23
Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120° , a tworząca tego stożka ma długość 4. Objętość tego stożka jest równa

A. 36π **B.** 18π **C.** 24π **D.** 8π

Rozwiązanie
Zacznijmy od rysunku



$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$

$h = 4\cos 60^0 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

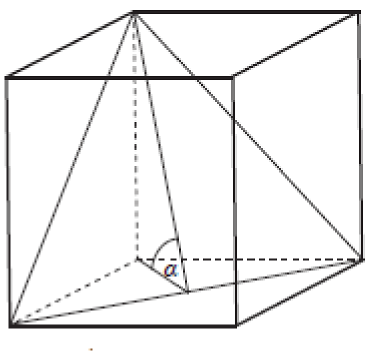
$r = 4\sin 60^o = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 8\pi$

Odpowiedź
D

Zadanie 24

Przekątna podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od wysokości graniastosłupa. Graniastosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i jeden wierzchołek drugiej podstawy (patrz rysunek).



Płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą graniastosłupa kąt α o mierze

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75°

Rozwiązanie

Ponieważ przekątna podstawy jest dwa razy dłuższa od wysokości graniastosłupa, więc połowa tej przekątnej jest równa wysokości graniastosłupa. Oznacza, to, że trójkąt którego bokami są: połowa przekątnej podstawy, krawędź boczna graniastosłupa i wysokość przekroju jest trójkątem prostokątnym równoramiennym

Odpowiedź

B

Zadanie 25

Średnia arytmetyczna sześciu liczb naturalnych: 31, 16, 25, 29, 27, *x*, jest równa $\frac{x}{2}$. Mediana tych liczb jest równa

A. 26 **B.** 27 **C.** 28 **D.** 29

Rozwiązanie

$$\frac{31+16+25+29+27+x}{6}=\frac{x}{2}$$

$$\frac{128+x}{3}=x$$

$$128+x=3x$$

$$2x=128$$

$$x=64$$

Po uporządkowaniu liczb otrzymamy, że ich mediana wynosi 28.

Odpowiedź

C